Calculs de sommes et de produits

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}}{2^{k-1}}$

Exercice 2: Calculer la somme et le produit de tous les entiers pairs entre 2 et $2n$, puis la somme et le produit de tous les impairs entre 1 et $2n+1$.

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q^k(1-q)$ où $q \in \mathbb{C}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2$.

Exercice 5: Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^4(k\theta)$ où $\theta \in]0;\frac{\pi}{4}[$

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4$ à l'aide d'un télescopage.

Retrouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$ en développant le terme dans la somme.

Exercice 7: Soit $n \geq 3$. Soit $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de nombres réels.

Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 2a_{k+1} - 3a_k + a_{k-1}$.

Exercice 8: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Quelle est la nature de la suite $(u_n - 3)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\mathbf{e}^k$ à l'aide de factorielles.

Exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $x \in]-\pi;\pi[$. Démontrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin(2^{-n}x)}$$

Sommes doubles

Exercice 11: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} 1$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} j$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$
4. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$
5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=p}^{n} 2^{i-j}$ où $p \in [\![1,n]\!]$
6. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} (5i^2 - 18i^2j^2 + 5j^2)$

Exercice 12: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux façons $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq k\leq n} 2^k$.

En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 13: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la somme $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z^p$.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\sum_{z\in\mathbb{U}_n} (z+a)^n$.

Coefficients binomiaux

Exercice 14: Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 15: *Formule du capitaine*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 16: Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$? Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

Exercice 17: Résoudre l'équation suivante:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$$

d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18: Démontrer la formule suivante :

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

Exercice 19: Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$.
En utilisant la formule du triangle de Pascal, calculer S_n.

Systèmes linéaires

Exercice 20: Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système

$$\begin{cases} x - my + m^2z = 2m \\ mx - m^2y + mz = 2m \\ mx + y - m^3z = 1 - m \end{cases}$$

Sans résoudre complètement le système, discuter suivant les valeurs de m la nature géométrique de l'ensemble des solutions réelles.

Exercice 21: Soient a et $b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire suivant, en discutant suivant les valeurs de a et b :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = a \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Exercice 22: Résoudre le jeu du journal *Ouest-France*.